

## CAPITULO 3

---

# RADIACION

---

### 3.1 INTRODUCCION

Como se expresó en el capítulo introductorio de este libro, la transferencia de calor por radiación está caracterizada porque la energía es transportada en la forma de ondas electromagnéticas. Las ondas viajan a la velocidad de la luz y el transporte de energía por radiación puede ocurrir entre superficies que son separadas mediante un vacío. La teoría de ondas y de la partícula son de gran ayuda para comprender el fenómeno de la radiación térmica.

La teoría ondulatoria establece que la radiación térmica puede ser concebida como una onda oscilante de frecuencia  $\nu$  y una longitud de onda  $\lambda$ . El producto de la frecuencia y la longitud de onda es la velocidad de propagación, que es la velocidad de la luz, de manera que se satisface que:

$$C = \lambda\nu \quad (3.1)$$

La Teoría de la partícula propone que la energía radiante es transportada como paquetes de energía denominada FOTONES. Cada fotón viaja a la velocidad de la luz con un nivel de energía distinto dado por:

$$e = h\nu \quad (3.2)$$

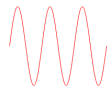
siendo  $h = 6,6256 \cdot 10^{-34} J$  la constante de Planck.

Los fotones de mayor frecuencia poseen mayor energía que aquellos de menor frecuencia. Cuando un cuerpo es calentado, electrones libres pueden

saltar a niveles de energía mayores o niveles de excitación. Cuando un electrón regresa a su nivel bajo de energía este emite un foton cuya energía es igual a la diferencia de energía entre su estado excitado y su estado de equilibrio. Para cualquier superficie, numerosos electrones están experimentando un cambio de nivel de energía en cualquier instante y por tanto la energía que deja la superficie es distribuida sobre un espectro de frecuencias. La energía es emitida solamente por virtud de la temperatura del cuerpo. La energía que deja la superficie en estas características es denominada radiación térmica.

### 3.2 ONDAS ELECTROMAGNETICAS

FRECUENCIA  $\nu$  Número de oscilaciones completas por unidad de tiempo de los campos eléctrico y magnético. Se mide en Hercios (Hz).  $1 \text{ Hz} = 1 \text{ s}^{-1}$ . La frecuencia es una característica de la O.E.M. independiente del medio en que se propague. LONGITUD DE ONDA  $\lambda$  Distancia entre dos puntos consecutivos que tienen la misma fase. La longitud de onda (para una frecuencia dada) depende de las características del medio en que se propaga

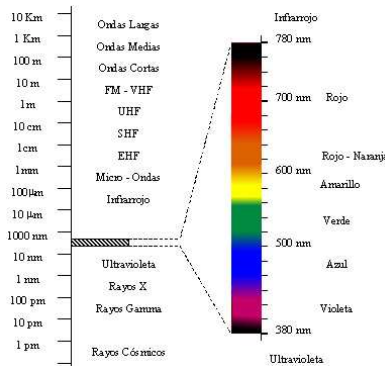


la onda.

VELOCIDAD DE PROPAGACIÓN ( $c = 300000\text{km/s}$

en el vacío).  $c = \lambda\nu$

### 3.3 ESPECTRO ELECTROMAGNETICO



- Radiación Térmica  $0.1 - 100\mu\text{m}$
- Rango visible  $0.38 - 0.76\mu\text{m}$

La radiación térmica comprende: Parte de UV, RV y IR

### 3.4 FISICA DE LA RADIACIÓN

Cuerpo negro: es un cuerpo ideal que emite la máxima cantidad de energía a una temperatura dada.

### 3.4.1 Ley de planck

Cuando un cuerpo negro es calentado a una temperatura,  $T$ , fotones son emitidos desde la superficie del cuerpo. los fotones tienen una distribución definida de energía dependiendo de la temperatura de la superficie. Max Planck en 1900 mostró que la energía emitida a una cierta longitud de onda desde un cuerpo negro viene dada por

$$E_{b\lambda} = \frac{C_1}{\lambda^5(\exp(C_2/\lambda T) - 1)}$$

donde:

- $E_{b\lambda}$ : Poder emisor monocromático,  $W/m^2 \cdot \mu m$
- $C_1$ : primera constante de radiación =  $3,741810^{-18} W m^2$
- $C_2$ : segunda constante de radiación =  $1,438810^{-2} m K$

### 3.5 PODER EMISIVO ESPECTRAL CUERPO NEGRO

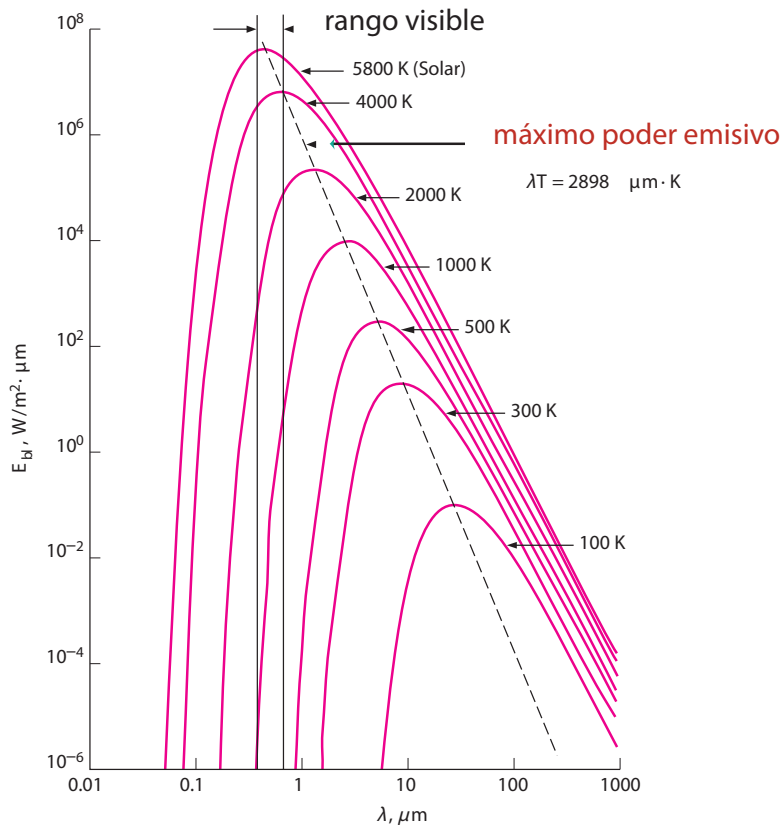


Figura 3.1: Poder emisor espectral.

- La potencia emisiva se incrementa para cada temperatura
- La posición del máximo de poder emisivo se desplaza hacia la derecha.

### 3.6 LEY DE DESPLAZAMIENTO DE WIEN

Establece la longitud de onda para la cual el poder emisivo es máximo

$$\frac{dE_{b\lambda}}{d\lambda} = \frac{d}{d\lambda} \left[ \frac{C_1}{\lambda^5 (\exp(C_2/\lambda T) - 1)} \right] = 0$$

$$\lambda T = 2898 \mu m K$$

### 3.7 LEY DE STEFAN-BOLTZMAM

$$E_b(T) = \int_0^\infty E_{b\lambda} d\lambda$$

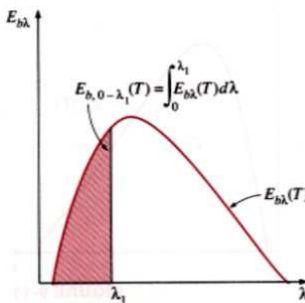
$$E_b(T) = \int_0^\infty \left[ \frac{C_1}{\lambda^5 (\exp(C_2/\lambda T) - 1)} \right] d\lambda$$

$$E_b(T) = \sigma T^4$$

$$\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} W/m^2 K^4$$

### 3.8 BANDAS DE EMISION

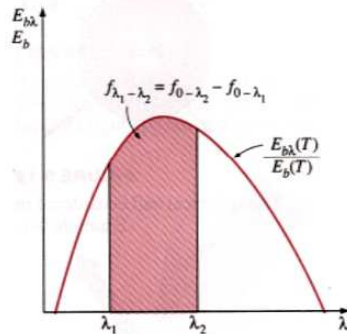
A menudo es necesario calcular la fracción de la emisión total de un cuerpo negro en un cierto intervalo de longitud de onda o banda de misión. Para ello se define la función de radiación,  $F_{o \rightarrow \lambda T}$ . Esta función se encuentra tabulada en la Tabla 3.1, página 36.



$$F_{o \rightarrow \lambda T} = \frac{\int_0^\lambda \left[ \frac{C_1}{\lambda^5 (\exp(C_2/\lambda T) - 1)} \right] d\lambda}{\int_0^\infty \left[ \frac{C_1}{\lambda^5 (\exp(C_2/\lambda T) - 1)} \right] d\lambda}$$

- Esta función se encuentra tabulada
- $0 < F_{o \rightarrow \lambda T} < 1$

## 3.9 BANDAS DE EMISION



$$F_{o \rightarrow \lambda_1 - \lambda_2} = F_{o \rightarrow \lambda_2 T} - F_{o \rightarrow \lambda_1 T}$$

- Si deseamos hallar la integración en un intervalo de longitud de ondas

■ EJEMPLO 3.1

Si se propone que el sol se comporta como un cuerpo negro a una temperatura,  $T = 5800K$ . Calcule

- El poder emisivo total
- La longitud de onda en la cual ocurre el máximo poder emisivo
- El porcentaje de la energía total que cae en el rango de longitudes de onda visible

Solución

- $E_b = \sigma T^4 = 6,42 \cdot 10^7 W/m^2$
- $\lambda_{max} = \frac{2,898 \cdot 10^{-3}}{5800} = 5 \cdot 10^{-7} = 0,5 \mu m$  ; Esta dentro del rango visible;
- 

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0,38 \mu m \\ \lambda_2 &= 0,76 \mu m; T = 5800K \\ \lambda_1 T &= 2204 \approx 2200 \mu m K \\ \lambda_2 T &= 4408 \approx 4400 \mu m K \end{aligned}$$

De las tabla 3.1, se tiene:

$$\begin{aligned} F_{0 \rightarrow \lambda_1 T} &= 0,10088 \\ F_{0 \rightarrow \lambda_2 T} &= 0,54879 \\ (F_{0 \rightarrow \lambda_2 T} - F_{0 \rightarrow \lambda_1 T}) \cdot 100 &= 44,8\% \end{aligned}$$

**Tabla 3.1** Función bandas de emisión

$\lambda T [\mu m K]$	$F_{0 \rightarrow \lambda T}$	$\lambda T [\mu m K]$	$F_{0 \rightarrow \lambda T}$
200	0,000000	6200	0,754140
400	0,000000	6400	0,769234
600	0,000000	6600	0,783199
800	0,000016	6800	0,796129
1000	0,000321	7000	0,808109
1200	0,002134	7200	0,819217
1400	0,007790	7400	0,829527
1600	0,019718	7600	0,839102
1800	0,039341	7800	0,848005
2000	0,066728	8000	0,856288
2200	0,100888	8500	0,874608
2400	0,140256	9000	0,890029
2600	0,183120	9500	0,903085
2800	0,227897	10000	0,914199
3000	0,273232	10500	0,923710
3200	0,318102	11000	0,931890
3400	0,361735	11500	0,939959
3600	0,403607	12000	0,945098
3800	0,443382	13000	0,955139
4000	0,480877	14000	0,962898
4200	0,516014	15000	0,969981
4400	0,548796	16000	0,973814
4600	0,579280	18000	0,980860
4800	0,607559	20000	0,985602
5000	0,633747	25000	0,992215
5200	0,658970	30000	0,995340
5400	0,680360	40000	0,997967
5600	0,701046	50000	0,998953
5800	0,720158	75000	0,999713
6000	0,737818	100000	0,999905

### ■ EJEMPLO 3.2

Un bombillo de 100 W consiste de un filamento que tiene forma rectangular de dimensiones de 5mm x 2 mm, e irradia como un cuerpo negro a 2900 K. (a) Suponiendo que todo el vidrio que envuelve al bombillo transmite toda la radiación visible, ¿Cuál es su eficiencia?

Solución

Rango visible 0.38  $\mu m$  a 0.76  $\mu m$

$$\lambda_1 T = 0.38 \cdot 2900 = 1102 \Rightarrow F_{0-\lambda_1} = 0.0012$$

$$\lambda_2 T = 0.76 \cdot 2900 = 2204 \Rightarrow F_{0-\lambda_2} = 0.100888$$

$$\eta = q_{vis}/q_{elec} = (F_{\lambda_2} - F_{\lambda_1}) A_s \cdot \sigma T^4 / q_{elec}$$

$$\eta = (0.100888 - 0.0012) \cdot 2 \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot 5,67 \cdot 10^{-8} \cdot 2900^4 / 100 = 8\%$$

### 3.10 PROPIEDADES RADIATIVAS

Las propiedades radiativas son aquellas propiedades que cuantitativamente describen cuanta energía radiante interactúa con la superficie de un material. Específicamente que cantidad *emite*, *refleja*, *absorbe* y *trasmite* una superficie. En general las propiedades radiativas son funciones de la longitud de onda. Por ejemplo una superficie puede ser un buen reflector en el rango visible y un pobre reflector en el rango infrarrojo. Propiedades que describen como se comporta una superficie con la longitud de onda son denominadas monocromática o espectrales. las propiedades que describen la distribución de la energía con el ángulo son denominadas direccionales. Las propiedades que son promediadas en el ángulo se denominan hemisféricas. Las propiedades que son promediadas en la longitud de onda son denominadas *totales*.

El uso de propiedades totales simplifica grandemente el análisis de la radiación. Hay ocasiones donde es importante considerar los efectos espectrales y direccionales de las propiedades.

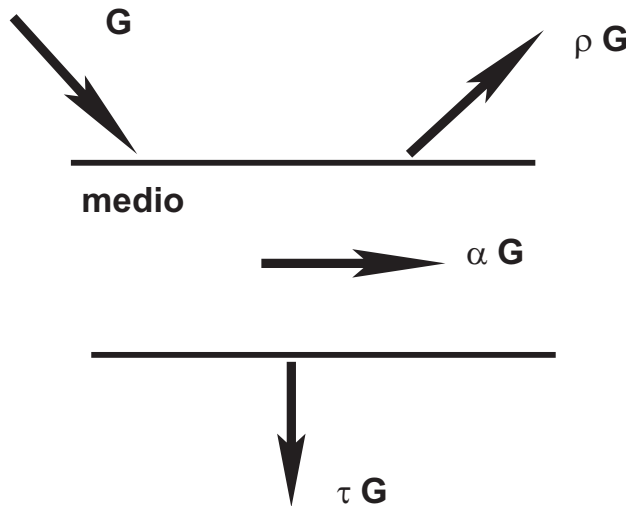


Figura 3.2: Propiedades radiativas.

$G$  Energía radiante incidente sobre una superficie (irradiación total)  $W/m^2$   
 $\rho$  Reflectividad total, es la fracción de energía incidente reflejada desde la superficie  
 $\alpha$  Absortividad total, es la fracción de energía incidente absorbida por el medio  
 $\tau$  Transmisividad total, es la fracción de energía incidente que es transmitida a través del medio. El balance de energía sobre la superficie establece:

$$\alpha G + \rho G + \tau G = G \quad (3.3)$$

En consecuencia

$$\alpha + \rho + \tau = 1 \quad (3.4)$$

si  $\tau = 1$  se dice que el cuerpo es *transparente* si  $\tau = 0$  se dice que el cuerpo es *opaco*, como ocurre con la mayoría de los sólidos (con la excepción del vidrio) si  $\tau \neq 0$  se dice que el cuerpo es *semitransparente*

Reflector perfecto, se denomina a la superficie con reflectividad igual a 1  $\rho = 1$ . Por tanto  $\alpha = \tau = 0$  Cuerpo negro, se denomina a la superficie que se comporta como absorbedor perfecto,  $\alpha = 1$ . Por tanto  $\rho = \tau = 0$ .

Otra propiedad importante se refiere a la emisividad.

dibujo

El cuerpo gris emite una fracción de lo que emite un cuerpo negro.

$$E = \epsilon \sigma T^4 \quad (3.5)$$

donde,

$$\epsilon_\lambda = \epsilon = \text{constante} \quad (3.6)$$

$\epsilon$  es la emisividad total, fracción de energía emitida con respecto a un cuerpo negro a la misma temperatura.

### 3.11 RADIOSIDAD

Se denomina radiosidad a la radiación que sale de una superficie por emisión y reflexión



Figura 3.3: Radiosidad.

$$J = \epsilon E_b + \rho G \quad (3.7)$$

### 3.12 CALOR NETO

El calor neto es un concepto muy importante y que será utilizado ampliamente cuando se realice la presentación del cálculo del intercambio de radiación entre superficies. Desde un punto de vista termodinámico, el calor neto se define como el calor que entra al sistema menos el calor que sale del sistema. Realizando un balance de energía sobre el sistema presentado en la fig. 3.4



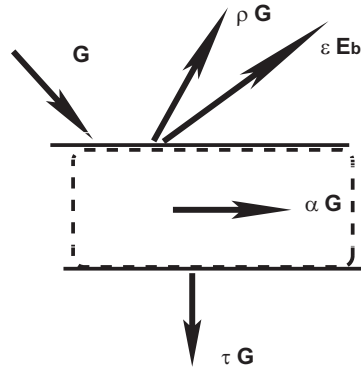


Figura 3.4: Calor neto.

se tiene,

$$q_{neto}'' = q_{entra}'' - q_{sale}'' = G - \rho G - \tau G - \epsilon E_b \quad (3.8)$$

$$q_{neto}'' = (1 - \rho - \tau)G - \epsilon E_b = \alpha G - \epsilon E_b \quad (3.9)$$

En equilibrio termodinámico el calor neto es cero, en consecuencia

$$\alpha G = \epsilon E_b \quad (3.10)$$

### 3.13 LEY DE KIRCHOFF

La ley de kirchoff establece una relación entre la absortividad y la emisividad, la cual presentaremos a continuación

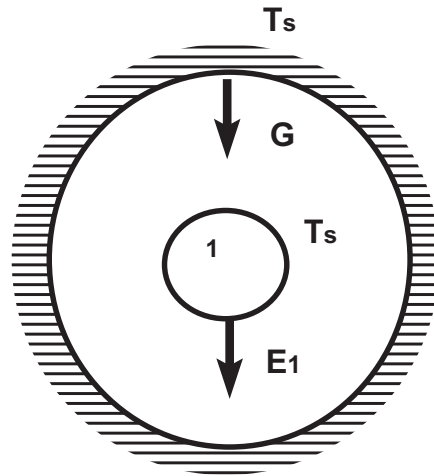


Figura 3.5: Ley de Kirchoff.

Si consideramos que los cuerpos mostrados en la fig. 3.5, se encuentran en equilibrio térmico, entonces en atención a lo dictado por la ec. 3.15, se puede escribir para el cuerpo 1.

$$\alpha_1 G = E_1 = \epsilon E_b(T_s) \quad (3.11)$$

Sí, además para el cuerpo 1 se tiene que su irradiación proviene del cuerpo negro que lo rodea, el cual también se encuentra a una temperatura  $T_s$ .

$$G = E_b(T_s) \quad (3.12)$$

En consecuencia,

$$\alpha_1 = \epsilon_1 \quad (3.13)$$

LO que en palabras, se puede expresar que en equilibrio térmico la absorptividad y la emisividad de un cuerpo son iguales.

Comentario: Se ha supuesto el comportamiento de gas gris. Si se hace el análisis en base monocromática, se obtiene que:

$$\alpha_\lambda = \epsilon_\lambda \quad (3.14)$$

Una conclusión importante de la ley de Kirchoff es que un cuerpo que es un buen absorbedor de la radiación también será un buen emisor de la radiación y viceversa.

### 3.14 PROPIEDADES RADIATIVAS MONOCROMÁTICAS

La absorptividad total se relaciona con la absorptividad monocromática por medio de la siguiente expresión:

$$\alpha = \frac{\int_0^\infty \alpha_\lambda G_\lambda d\lambda}{\int_0^\infty G_\lambda d\lambda} \quad (3.15)$$

donde  $\alpha_\lambda$ , se refiere a la absorptividad monocromática

De manera similar se puede escribir para la reflectividad y transmisividad total vienen dadas por las siguientes expresiones:

$$\rho = \frac{\int_0^\infty \rho_\lambda G_\lambda d\lambda}{\int_0^\infty G_\lambda d\lambda} \quad (3.16)$$

$$\tau = \frac{\int_0^\infty \tau_\lambda G_\lambda d\lambda}{\int_0^\infty G_\lambda d\lambda} \quad (3.17)$$

donde  $\rho_\lambda$  y  $\tau_\lambda$  se refieren a la reflectividad y transmisividad monocromática, respectivamente.

Cabe resaltar que en un análisis realizado para una única longitud de onda, se cumple:

$$\alpha_\lambda + \rho_\lambda + \tau_\lambda = 1 \quad (3.18)$$

### 3.15 EMISIVIDAD MONOCROMÁTICA

La emisividad monocromática ó espectral se define como la relación entre el poder emisor a una determinada temperatura con respecto al poder emisor espectral correspondiente a un cuerpo negro a la misma temperatura.

$$\epsilon_\lambda = \frac{E_\lambda(T)}{Eb_\lambda(T)} \quad (3.19)$$

De manera que la emisividad total en términos de la emisividad espectral puede ser definida, mediante:

$$\epsilon = \frac{\int_0^\infty \epsilon_\lambda Eb_\lambda d\lambda}{\int_0^\infty Eb_\lambda d\lambda} \quad (3.20)$$

### ■ EJEMPLO 3.3

Un automóvil está estacionado al sol. El parabrisas posee una transmisividad de 0.92 para longitud de onda entre  $0,3\mu m$  y  $3\mu m$  y es opaco para las restantes longitudes de onda. El interior del carro puede ser considerado como un cuerpo negro a 300 K. El sol es una fuente negra a  $5800k$  produciendo una irradiación,  $G_s = 1100W/m^2$  sobre el parabrisas. Se pide calcular: a) La transmisividad total del parabrisas para la irradiación solar b) La transmisividad total del parabrisas para la irradiación proveniente del interior del automóvil c) El flujo de energía radiante del sol transmitida a través del parabrisas d) El flujo de energía radiante desde el interior del automóvil transmitido a través del parabrisas.

solución a)

$$\tau = \frac{\int_0^\infty \tau_\lambda G_\lambda d\lambda}{\int_0^\infty G_\lambda d\lambda}$$

siendo  $\lambda_1 = 0,3\mu m$  y  $\lambda_2 = 3\mu m$  y considerando que  $G_\lambda = Eb_\lambda$ , se tiene:

$$\tau = \frac{\int_0^\infty \tau_\lambda Eb_\lambda d\lambda}{\sigma T^4} = 0,92 \frac{\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} Eb_\lambda d\lambda}{\sigma T^4}$$

La integral anterior puede ser expresada en términos de las funciones de banda de radiación de la siguiente manera:

$$\tau = 0,92(F_{(0 \rightarrow \lambda_2 T_s)} - F_{(0 \rightarrow \lambda_1 T_s)}) \quad (3.21)$$

La temperatura desde la cual proviene la radiación es el sol,  $T_s = 5800K$

$$\lambda_2 T_s = 3\mu m \cdot 5800K = 17400\mu mK$$

$$\lambda_1 T_s = 0,3\mu m \cdot 5800K = 1740\mu mK$$

y evaluando las funciones de bandas de emisión para dichos argumentos se obtiene:

$$F_{(0 \rightarrow \lambda_2 T_s)} = 0,977$$

$$F_{(0 \rightarrow \lambda_1 T_s)} = 0,033$$

De manera que sustituyendo dichos valores en la ec. 3.21, se tiene:

$$\tau = 0,92(F_{(0 \rightarrow \lambda_2 T_s)} - F_{(0 \rightarrow \lambda_1 T_s)}) = 0,92(0,977 - 0,033) = 0,868$$

b) para el cálculo de esta parte el procedimiento es muy similar al procedimiento descrito en la parte a), con la diferencia que ahora la fuente de energía proviene del interior del automóvil,  $T_a$ , en consecuencia:

$$\tau = 0,92(F_{(0 \rightarrow \lambda_2 T_a)} - F_{(0 \rightarrow \lambda_1 T_a)})$$

donde los nuevos argumentos de las funciones de bandas de emisión corresponden a:

$$\lambda_2 T_s = 3\mu m \cdot 300K = 900\mu m K$$

$$\lambda_1 T_s = 0,3\mu m \cdot 300K = 90\mu m K$$

que determinan que las funciones de bandas de emisión correspondan a:

$$F_{(0 \rightarrow \lambda_2 T_a)} = 0,0001686$$

$$F_{(0 \rightarrow \lambda_1 T_a)} = 0,0$$

que en definitiva determina que la transmisividad,  $\tau_a$  corresponda a:

$$\tau = 0,92(F_{(0 \rightarrow \lambda_2 T_a)} - F_{(0 \rightarrow \lambda_1 T_a)}) = 0,92(0,0001686 - 0,0) \approx 0$$

c)  $(\tau G)_{sol} = 0,868 \cdot 1100W/m^2 = 955W/m^2$  d)  $(\tau G)_{fuera} = 0,0 \cdot \sigma T_a^4 \approx 0W/m^2$

**Comentario** Se transmite una gran parte de la energía proveniente del sol hacia el interior del automóvil, mientras que hacia fuera del automóvil prácticamente no se transfiere absolutamente nada. Este comportamiento que posee el vidrio de funcionar como un filtro para las radiaciones provenientes de fuentes a baja temperatura y transmitir adecuadamente cuando la fuente es de alta temperatura, se conoce como el **efecto invernadero**. El cual determina que el interior del automóvil se encuentre al cabo de un tiempo a mayor temperatura que afuera del automóvil. Este mismo comportamiento se presenta en la atmósfera el cual posee un comportamiento similar al vidrio y permite entender el fenómeno denominado **calentamiento global** de la tierra.

### 3.16 PROPIEDADES DIRECCIONALES

Para introducir propiedades direccionales es necesario definir: ángulo sólido e Intensidad de radiación

#### 3.16.1 ángulo sólido

Es la medida de un ángulo en una geometría sólida. Se define como la proyección normal de  $dA$  dividida por el cuadrado de el radio entre el punto  $O$  y el área proyectada.

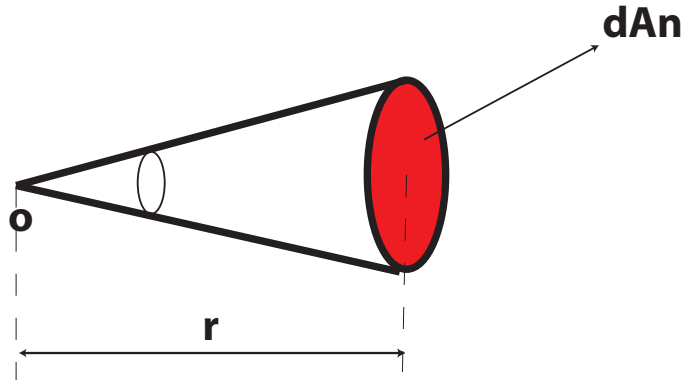


Figura 3.6: Angulo sólido.

$$d\omega = \frac{dA_n}{r^2} \tag{3.22}$$

La medida del ángulo sólido es el estereoradian.  
 El  $dA_N$  es mostrado en la Fig. 3.8 en coordenadas esféricas

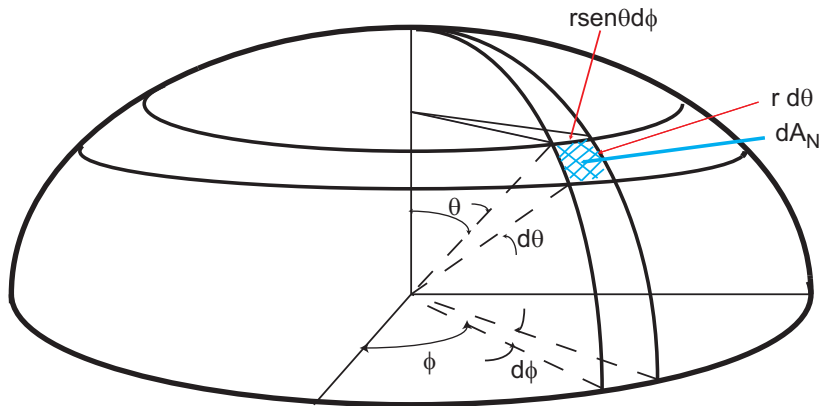


Figura 3.7: Angulo sólido en coordenadas esféricas.

$$dA_n = r \text{sen} \theta d\phi r d\theta = r^2 \text{sen} \theta d\phi d\theta \tag{3.23}$$

$$d\omega = \frac{dA_n}{r^2} = \text{sen} \theta d\theta d\phi \tag{3.24}$$

Para calcular el ángulo sólido que subtiende un hemisferio es necesario realizar la integración del diferencial de angulo solido para  $0 < \phi < 2\pi$  y  $0 < \theta < \pi$ .

$$\omega = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \text{sen}\theta d\theta d\phi = 2\pi \int_0^\pi \text{sen}\theta d\theta = 4\pi \quad (3.25)$$

### 3.17 INTENSIDAD ESPECTRAL DE RADIACIÓN

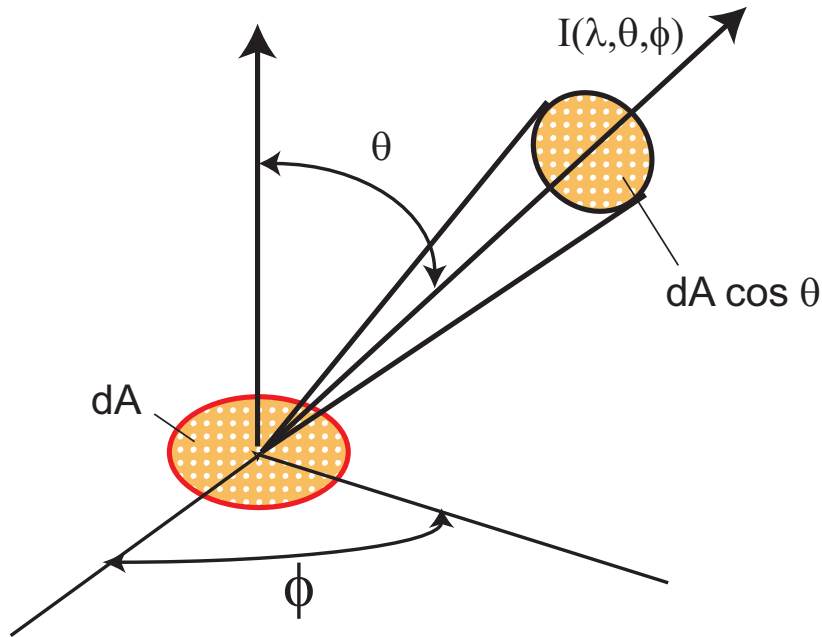


Figura 3.8: Intensidad espectral de radiación.

Es la energía radiante por unidad de área normal a la dirección a una cierta longitud de onda, en la dirección  $(\theta, \phi)$ , por unidad de tiempo, por unidad de ángulo sólido, y por unidad de longitud de onda:

$$I_\lambda(\lambda, \theta, \phi) = \frac{dq''}{\cos\theta d\omega d\lambda} \quad (3.26)$$

#### 3.17.1 Intensidad total de radiación

Cuando la Intensidad espectral de radiación es integrada sobre todas las longitudes de onda, estamos en presencia de la Intensidad total de radiación, la cual se expresa mediante:

$$I = \int_0^\infty I_\lambda(\lambda, \theta, \phi) d\lambda \quad (3.27)$$

#### 3.17.2 Poder Emisivo Total Hemisférico

El poder Emisivo total hemisférico se obtiene cuando se procede a integrar el flujo de calor que deja una superficie, que corresponde a la integración sobre

todo el ángulo sólido que subtiende un hemisferio,  $0 < \phi < 2\pi$  y  $0 < \theta < \pi/2$ .

$$E = q'' = \int_{hemisferio} I(\theta, \phi) d\omega \quad (3.28)$$

y recordando que el diferencial de ángulo sólido viene dado por la ec. 3.24, finalmente se tiene:

$$E = q'' = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} I(\theta, \phi) \text{sen}\theta d\theta d\phi \quad (3.29)$$

Para realizar el proceso de integración descrito en la ec.3.31, es necesario conocer la función matemática que describe a la Intensidad de radiación, y para ello se presenta el concepto de superficie difusa.

### 3.17.3 Superficie Difusa

Una superficie que irradia con igual intensidad sobre todas las direcciones, se denomina: Superficie difusa ó superficie que obedece la ley del coseno de Lambert, que en terminos matemáticos, se escribe:

$$I(\theta, \phi) = \text{constante} = I \quad (3.30)$$

Sí la Intensidad de radiación es una constante, entonces , se puede proceder a realizar el proceso de integración del poder emisor total, para el caso de una superficie difusa.

$$E = I \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \text{sen}\theta d\theta d\phi = \pi I \quad (3.31)$$

El cuerpo negro por ser ideal es una superficie difusa, es decir emite la misma cantidad de radiación en cada una de las direcciones, como consecuencia de ello; podemos escribir que para un cuerpo negro, se cumple:

$$E_b = \pi I_b \quad (3.32)$$

En estos momentos estamos en capacidad de presentar la emisividad direccional

### 3.17.4 Emisividad direccional

La emisividad direccional se define como la relación entre la intensidad de radiación con respecto a la intensidad de radiación de un cuerpo negro, tal como lo expresa la ec. 3.33.

$$\epsilon(\theta, \phi) = \frac{I(\theta, \phi)}{I_b} \quad (3.33)$$

De manera que sí la superficie es no-difusa, entonces la emisividad total puede ser determinada mediante:

$$\epsilon = \frac{E}{E_b} = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} I(\theta, \phi) \text{cos}\theta \text{sen}\theta d\theta d\phi}{\pi I_b} \quad (3.34)$$

ó en términos de la emisividad direccional,

$$\epsilon = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \epsilon(\theta, \phi) \cos\theta \sin\theta d\theta d\phi \quad (3.35)$$

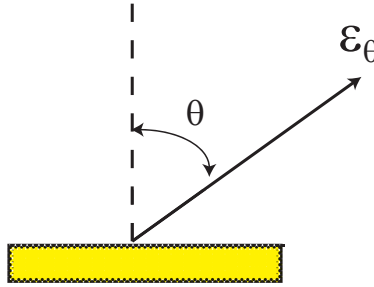


Figura 3.9: Emisividad direccional función exclusiva del ángulo  $\theta$ .

Sí, la emisividad direccional no es función del ángulo  $\phi$ , se cumple que  $\epsilon(\theta, \phi) = \epsilon(\theta)$  en cuyo caso, la ec.3.36, se reduce a:

$$\epsilon = 2 \int_0^{\pi/2} \epsilon(\theta) \cos\theta \sin\theta d\theta \quad (3.36)$$

En la Fig. 3.10 se muestra el comportamiento de la emisividad direccional para materiales conductores y no conductores de la electricidad. En el caso de los conductores, la emisividad direccional es baja para ángulos  $\theta$  comprendidos entre 0 y 45°, para después incrementarse y bajar considerablemente cuando el ángulo  $\theta$  se acerca a 90°. En el caso de los materiales no conductores, la emisividad direccional es alta en un rango importante del ángulo  $\theta$  y decayendo su valor abruptamente cuando se acerca a un ángulo  $\theta$  de 90°.



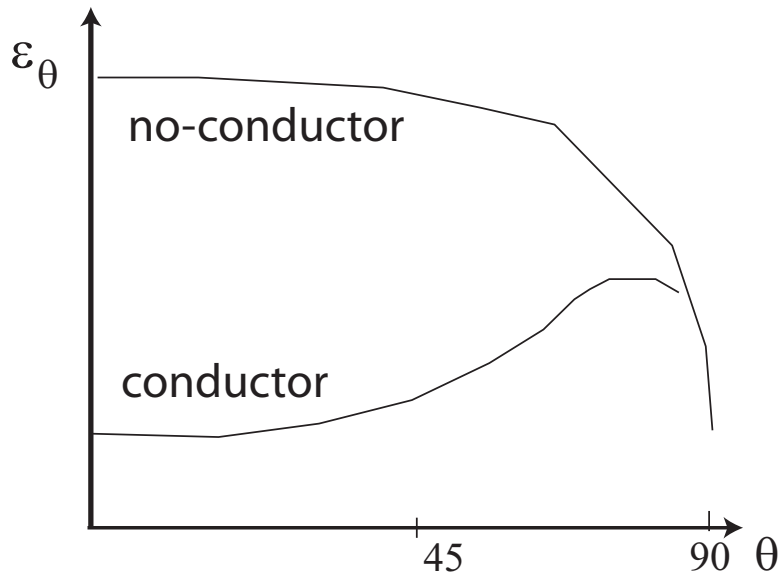


Figura 3.10: Emisividad direccional para materiales conductores y no-conductores.

La absorptividda, transmisividad y reflectividad dependen tanto de la distribución de la intensidad que llega como de la que sale de la superficie. Estas propiedades son referidas como propiedades bidireccionales. En particular con respectopa la reflexión existen dos caso límites: Reflexión difusa y reflexión especular.

La reflexión difusa se caracteriza porque la reflexión se realiza con la misma intensidad en cada una de las direcciones, mientras que la reflexión especular, cumple con la condición de que sólo se realiza en una dirección que forma con respecto a la normal el mismo ángulo.

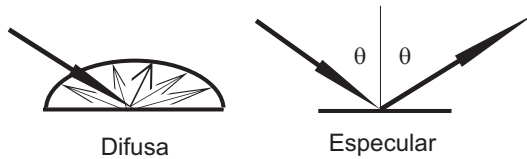


Figura 3.11: Reflexión difusa y especular.

### 3.18 FACTOR DE VISTA

El factor de vista se define como la fracción de energía radiante que deja una superficie  $i$  que es interceptada por la superficie  $j$

$d\omega_{j-i}$  es el ángulo sólido subtendido por  $dA_j$  cuando es visto desde  $dA_i$

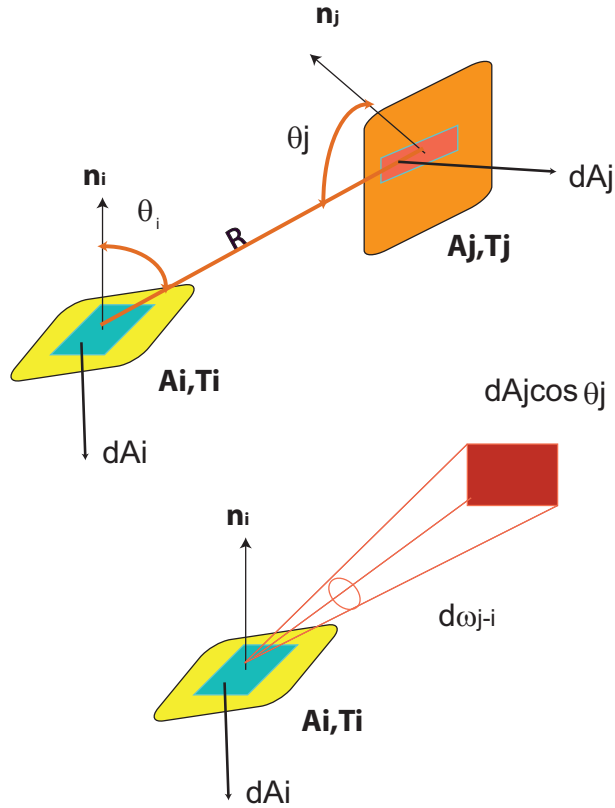


Figura 3.12: Factor de vista

$$d\omega_{j-i} = \frac{dA_j \cos \theta_j}{R^2} \quad (3.37)$$

$$dq_{i-j} = I_i \cos \theta_i dA_i d\omega_{j-i} \quad (3.38)$$

$$dq_{i-j} = I_i \cos \theta_i dA_i \frac{dA_j \cos \theta_j}{R^2} \quad (3.39)$$

Si la superficie  $i$  emite y refleja en forma difusa,

$$I_i = \frac{J_i}{\pi} \quad (3.40)$$

$$dq_{i-j} = \frac{J_i \cos\theta_i dA_i dA_j \cos\theta_j}{\pi R^2} \quad (3.41)$$

$$q_{i-j} = J_i \int_{A_i} \int_{A_j} \frac{\cos\theta_i dA_i dA_j \cos\theta_j}{\pi R^2} \quad (3.42)$$

En la expresión anterior se ha supuesto que  $J_i$  es uniforme sobre  $A_i$ , y por tanto recordando la definición de factor de vista

$$F_{ij} = \frac{q_{i \rightarrow j}}{A_i J_i} \quad (3.43)$$

$$F_{ij} = \frac{1}{A_i} \int_{A_i} \int_{A_j} \frac{\cos\theta_i dA_i dA_j \cos\theta_j}{\pi R^2} \quad (3.44)$$

### 3.19 METODO DE LAS CUERDAS DE HOTTEL

El método de las cuerdas de Hottel permite el cálculo del Factor de vista de dos figuras bidimensionales incluso en situaciones donde existen obstrucciones parciales entre las dos figuras. Los detalles de su derivación han sido omitidos.

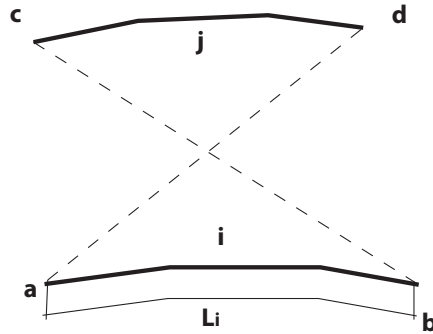


Figura 3.13: Método de las cuerdas de Hottel.

Para el caso sin obstrucción, el método establece:

$$F_{ij} = \frac{1}{2L_i} ((\overline{ad} + \overline{cb}) - (\overline{ab} + \overline{cd})) \quad (3.45)$$

#### ■ EJEMPLO 3.4

Usando el método de las cuerdas de Hottel. Calcular el Factor de vista,  $F_{12}$  para las siguientes configuraciones

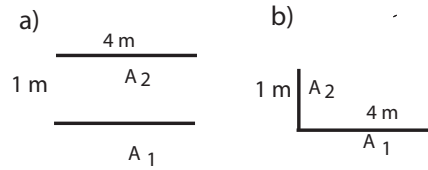


Figura 3.14: Ejemplo 3.4

a)  $F_{12} = \frac{1}{2.4} (2\sqrt{4^2 + 1} - 2) = 0.781$   
 b)  $F_{12} = \frac{1}{2.4} ((1 + 4) - \sqrt{4^2 + 1}) = 0.110$

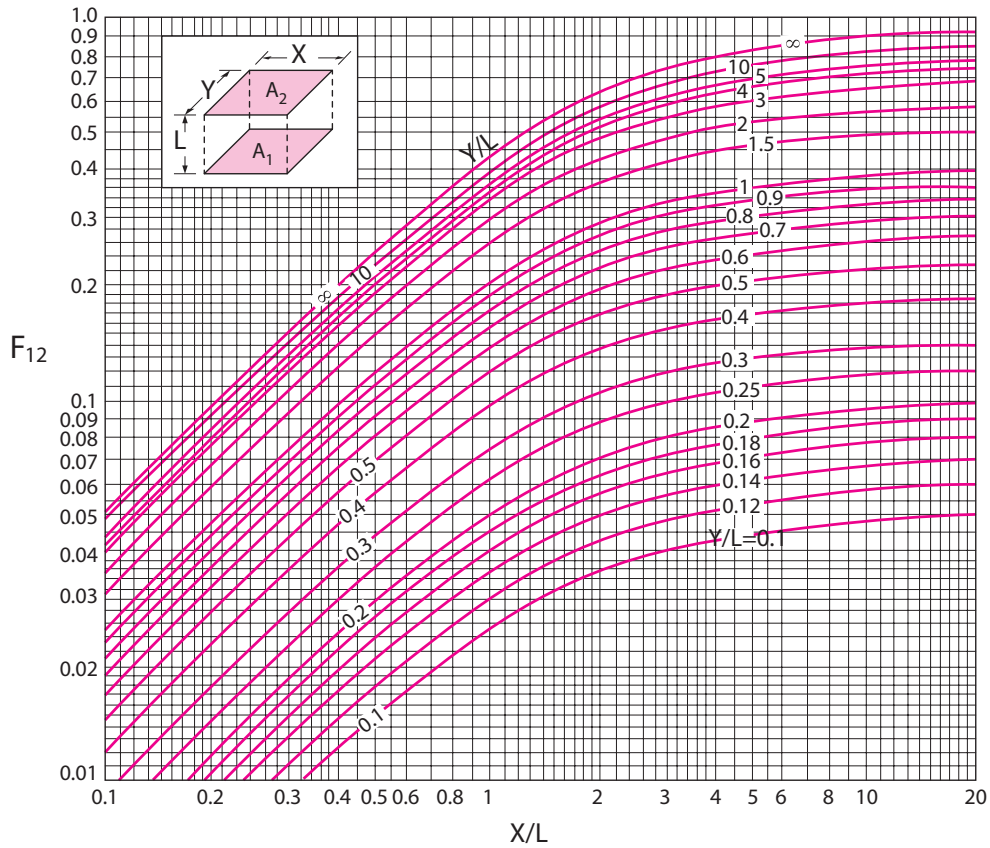


Figura 3.15: Factor de vista para placas paralelas

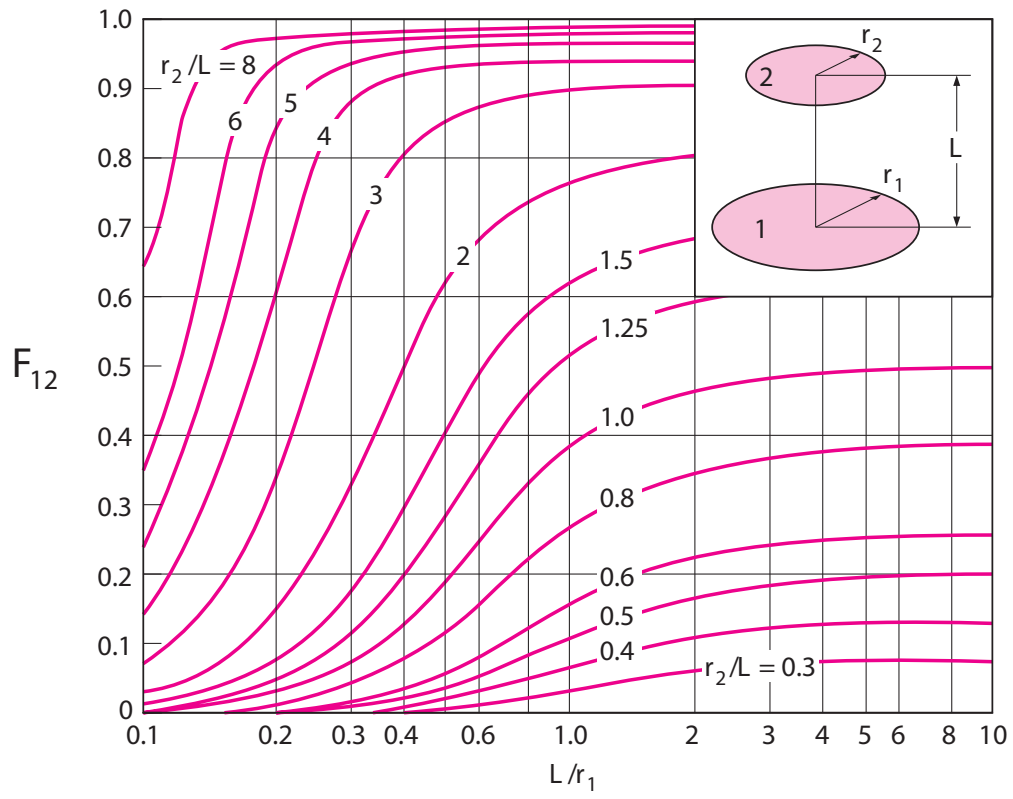


Figura 3.16: Factor de vista para discos coaxiales paralelos

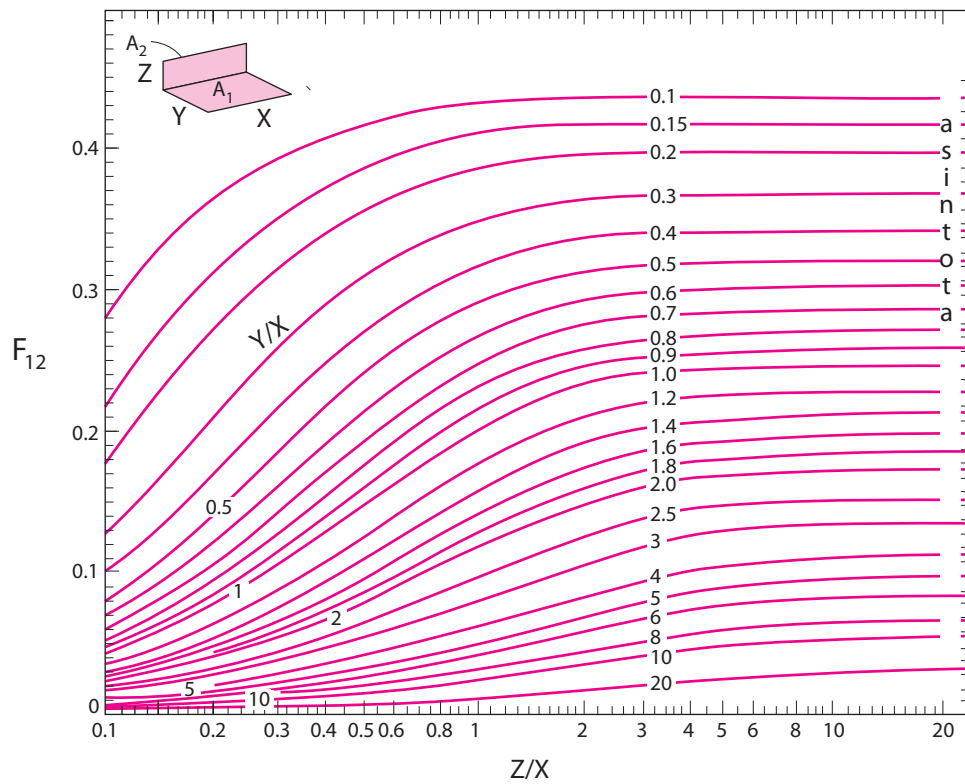


Figura 3.17: Factor de vista para rectangulos perpendiculares

### 3.20 ALGEBRA DE FACTORES DE VISTA

#### 3.20.1 Relación de reciprocidad

$$A_i F_{ij} = A_j F_{ji} \tag{3.46}$$

3.20.2 Relación para una cavidad

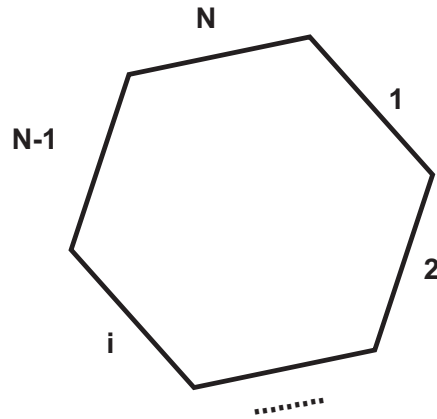


Figura 3.18: Relación para una cavidad.

$$\sum_{j=1}^N F_{ij} = 1 (i = 1, 2, 3, \dots, N) \tag{3.47}$$

3.20.3 Relación de aditividad.

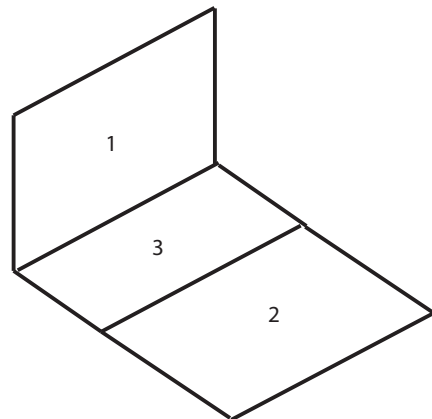


Figura 3.19: Relación de aditividad.

$$\begin{aligned} A_4 &= A_2 + A_3 \\ F_{14} &= F_{12} + F_{13} \end{aligned} \tag{3.48}$$

### 3.20.4 Relación de adición de factores de vista

Una relación que es de mucha utilidad se obtiene de utilizar reciprocidad y aditividad de factores de vista. Multiplicando la ec. 3.48 por  $A_1$ , se tiene

$$A_1 F_{14} = A_1 F_{12} + A_1 F_{13} \quad (3.49)$$

y aplicando reciprocidad a la expresión anterior, nos queda:

$$A_4 F_{41} = A_2 F_{21} + A_3 F_{31} \quad (3.50)$$

Esta última expresión se conoce como la relación de adición de factores de vista

### 3.21 INTERCAMBIO DE CALOR POR RADIACIÓN ENTRE SUPERFICIES NEGRAS

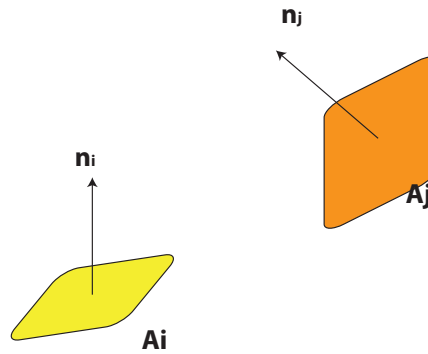


Figura 3.20: Intercambio entre superficies negras.

$$q_{i \rightarrow j} = A_i E b_i F_{ij} \quad (3.51)$$

$$q_{j \rightarrow i} = A_j E b_j F_{ji} \quad (3.52)$$

Definiendo el intercambio neto de calor por radiación entre dos superficies  $q_{ij}$ , como

$$q_{ij} = q_{i \rightarrow j} - q_{j \rightarrow i} = A_i E b_i F_{ij} - A_j E b_j F_{ji} \quad (3.53)$$

y usando la relación de reciprocidad, ec. 3.46. se tiene:

$$q_{ij} = A_i F_{ij} (E b_i - E b_j) \quad (3.54)$$

Esta última expresión acepta que pueda ser utilizada una analogía eléctrica, donde los potenciales corresponden a los poderes emisivos, de manera que se puede reescribir, via:



$$q_{ij} = \frac{(Eb_i - Eb_j)}{\frac{1}{A_i F_{ij}}} \tag{3.55}$$

donde se identifica la resistencia geometrica como:

$$R_{ij} = \frac{1}{A_i F_{ij}} \tag{3.56}$$

### 3.22 INTERCAMBIO DE CALOR POR RADIACIÓN EN UNA CAVIDAD DE SUPERFICIES NEGRAS

En esta sección desarrollaremos la metodología de cálculo para el intercambio de calor por radiación en una cavidad cerrada conformada por  $N$  superficies negras.

En primer lugar, definiremos, el calor neto perdido. Para mayor claridad, lo expresaremos en términos de la radiosidad,  $J$  y la irradiación,  $G$ , en alusión a la Fig. 3.21, que corresponde a una superficie,  $i$ , cualesquiera:

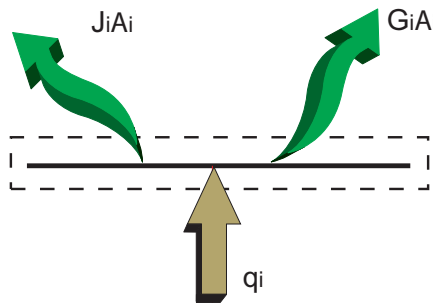


Figura 3.21: Calor neto perdido.

Realizando un balance de energía, se obtiene

$$q_i = (J_i - G_i)A_i \tag{3.57}$$

Una interpretación física que se le puede dar al calor neto perdido, corresponde al calor que hay que agregar a la superficie a efectos de que se mantenga a la misma temperatura.

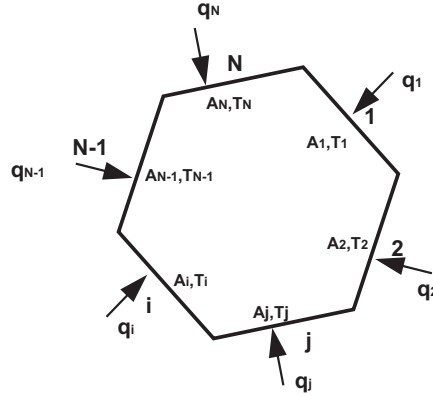


Figura 3.22: Cavidad de N superficies negras.

Para una superficie negra, la radiosidad es igual al poder emisivo

$$J_i = Eb_i \quad (3.58)$$

A continuación cuantificaremos la irradiación total que le llega a la superficie  $i$

$$G_i A_i = \sum_{j=1}^N F_{ji} A_j Eb_j = \sum_{j=1}^N F_{ij} A_i Eb_j = A_i \sum_{j=1}^N F_{ij} Eb_j \quad (3.59)$$

$$q_i = Eb_i A_i - A_i \sum_{j=1}^N F_{ij} Eb_j \quad (3.60)$$

Recordando que  $\sum_{j=1}^N F_{ij} = 1$ , la ecuación anterior la podemos reescribir, como:

$$q_i = Eb_i A_i \sum_{j=1}^N F_{ij} - A_i \sum_{j=1}^N F_{ij} Eb_j \quad (3.61)$$

$$q_i = \sum_{j=1}^N A_i F_{ij} (Eb_i - Eb_j) \quad (3.62)$$

$$q_i = \sum_{j=1}^N \frac{(Eb_i - Eb_j)}{\frac{1}{A_i F_{ij}}} \quad (3.63)$$

La ecuación anterior puede ser reescrita en términos de los calores intercambiados entre las superficies tomadas de dos en dos:

$$q_i = \sum_{j=1}^N \frac{(Eb_i - Eb_j)}{\frac{1}{A_i F_{ij}}} = \sum_{j=1}^N q_{ij} \quad (3.64)$$

La expresión anterior es la base de sustentación de la analogía eléctrica para radiación, la cual fue desarrollada por Oppenheim (1956).

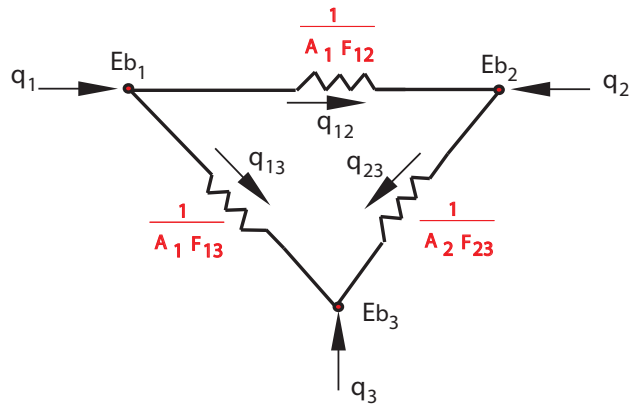


Figura 3.23: Analogía eléctrica para tres superficies negras.

A continuación se ilustra la aplicación de la analogía eléctrica para radiación para un acavidad conformada por tres superficies negras.

### ■ EJEMPLO 3.5

Dos placas paralelas de  $1m \times 1m$  y separadas por  $1m$ , pueden ser aproximadas como cuerpos negros a  $500K$  y  $750K$ . Las placas están ubicadas en un gran cuarto cuyas paredes se encuentran a  $300K$ . Determine el calor neto perdido de cada placa y el calor neto por radiación transferido a las placas del cuarto.

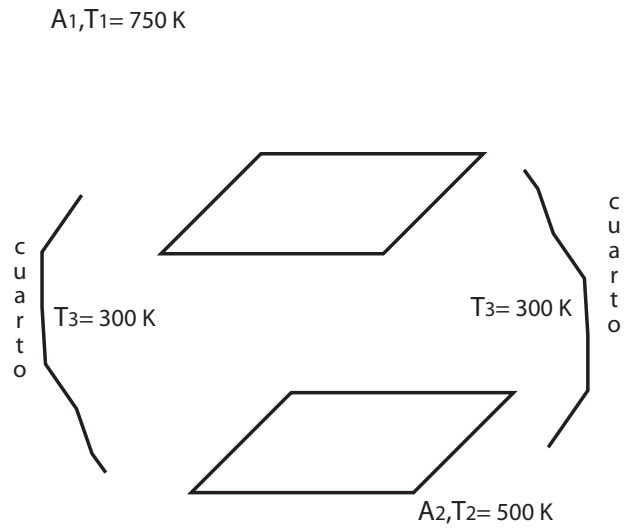


Figura 3.24: Ejemplo 3.5

Cálculo de los factores de vista con la ayuda de la Fig. 3.15.

$$\begin{aligned}
 X/L &= 1, Y/L = 1 \\
 F_{12} &= F_{21} = 0.2 \\
 F_{11} + F_{12} + F_{13} &= 1 \\
 F_{13} &= 1 - F_{12} = 1 - 0.2 = 0.8 \\
 F_{13} &= F_{23} = 0.8
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Eb_1 &= \sigma T_1^4 = 17940,2W/m^2 \\
 Eb_2 &= \sigma T_2^4 = 3543,75W/m^2 \\
 Eb_3 &= \sigma T_3^4 = 459,27W/m^2 \\
 R_{12} &= \frac{1}{A_1 F_{12}} = 5 \quad ; \quad R_{13} = \frac{1}{A_1 F_{13}} = 1,25 \\
 q_{12} &= \frac{Eb_1 - Eb_2}{R_{12}} \\
 q_{13} &= \frac{Eb_1 - Eb_3}{R_{13}} \\
 q_{12} &= \frac{Eb_1 - Eb_2}{R_{23}}
 \end{aligned}$$

Del circuito eléctrico analogo se tiene:

$$q_1 = q_{12} + q_{13} = 16864W$$

De igual manera,

$$q_2 = q_{23} - q_{12} = -411,7W$$

De igual manera,

$$q_3 = -q_{13} - q_{23} = -16452,3W$$

Comprobacion: Se debe cumplir que la suma de todos los calores neto debe ser cero

$$q_1 + q_2 + q_3 = 16864 - 411,7 - 16452,3 \approx 0$$

### 3.23 INTERCAMBIO D CALOR POR RADIACIÓN ENTRE SUPERFICIES GRISES

Suposiciones Las superficies emiten y reflejan en forma difusa. Las superficies son grises ( $\alpha = \epsilon$ ). Las superficies son opacas ( $\tau = 0$ )

$$q_i = (J_i - G_i)A_i \tag{3.65}$$

$$J_i = \epsilon_i Eb_i + \rho_i G_i \tag{3.66}$$

Despejando la irradiación asociada a la superficie  $i$ ,  $G_i$ , en la ec. 3.66

$$G_i = \frac{J_i - \epsilon_i Eb_i}{\rho_i}$$

y sustituyendo en la expresión del calor neto, ec. 3.65

$$q_i = (J_i - \frac{J_i - \epsilon_i Eb_i}{\rho_i})A_i = \frac{(\rho_i - 1)J_i + \epsilon_i Eb_i}{\rho_i} \tag{3.67}$$

dado que  $\rho = 1 - \alpha = 1 - \epsilon$ , se tiene que,  $\rho_i - 1 = -\epsilon_i$ . Por tanto la ecuación del calor neto, queda finalmente:

$$q_i = \frac{\epsilon_i(Eb_i - J_i)A_i}{\rho_i} \quad (3.68)$$

También es posible realizar una analogía eléctrica cuando se está en presencia de superficies grises

$$q_i = \frac{(Eb_i - J_i)}{\frac{\rho_i}{\epsilon_i A_i}} \quad (3.69)$$

donde el término  $\frac{\rho_i}{\epsilon_i A_i}$  se le denomina, resistencia de superficie.

La aplicación de la analogía eléctrica para una cavidad conformada por tres superficies grises es ilustrado en la fig. 3.25.

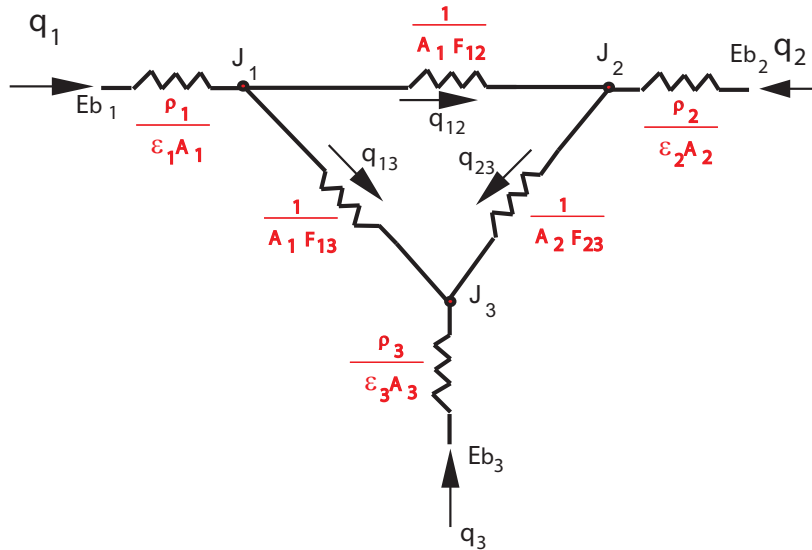


Figura 3.25: Analogía eléctrica para tres superficies grises.

### 3.23.1 Superficie refractaria o reradiante

Se dice que una superficie es reradiante o refractaria cuando el calor neto es cero,  $q_i = 0$ , es decir cuando  $J_i = G_i$

### 3.23.2 Transferencia de calor combinada

En esta sección mostraremos el tratamiento de situaciones que involucran adicionalmente a la radiación, otros mecanismos de transferencia de calor. La Figura 3.26 muestra el balance de energía sobre una superficie en la cual se incluye el efecto combinado de conducción, convección, radiación y la posibilidad de tener una fuente externa de calor.

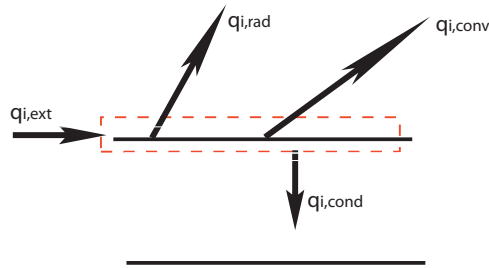


Figura 3.26: Balance de calor multimodal.

Realizando el balance sobre la superficie, se tiene:

$$q_{i,ext} = q_{i,rad} + q_{i,conv} + q_{i,cond} \tag{3.70}$$

Para la resolución de problemas que involucra mecanismos combinados es de utilidad representar mediante un circuito electrico analogo, el cual incluya los distintos mecanismos. En la figura ?? se presenta el circuito electrico que caracteriza a la superficie; el cual está representado por el nodo  $i$ .

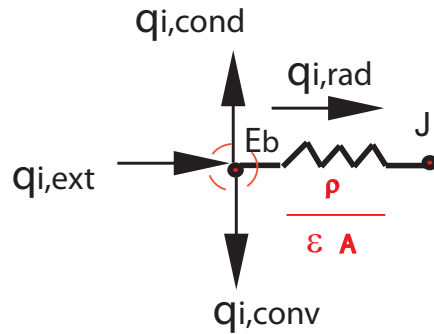


Figura 3.27: Analogía eléctrica para el caso de transferencia multimodal.